Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin

Einführung in die Differentialgeometrie WS 2013/2014

Klaus Ecker

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Sei $F(\theta, \phi) = ((a + b\cos\phi)\cos\theta, (a + b\cos\phi)\sin\theta, b\sin\phi)$ für $a > b > 0$ und $0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < 2\pi$ eine Parametrisierung eines Torus T in $\mathbf{R}^3$.

(a) Berechne $Area\,(T)$.

(b) Berechne $\int_T K\,dA$ für die Gaußkrümmung K von T .

2 Punkte

Aufgabe 2. Sei $A = (a_{ij})$ eine symmetrische, invertierbare $n \times n$ - Matrix und bezeichne $A^{-1} = (a^{ij})$ ihre Inverse.

(a) Zeige: $\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A = \det A \cdot a^{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.

(b) Betrachte nun eine Familie von symmetrischen, invertierbaren $n \times n$ - Matrizen $(A(t)) = (a_{ij}(t))$, $t \in I$ für ein offenes Interval $I \subset \mathbf{R}$. Wir setzen weiterhin voraus, dass $a_{ij} : I \to \mathbf{R}$ differenzierbar ist für alle $1 \leq i, j \leq n$. Zeige: $\frac{d}{dt} \det A = \det A \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{d}{dt} a_{ij}$ auf I.

2 Punkte

Aufgabe 3. Sei $S = F(U)$ eine glatte parametrisierte n- Fläche im $\mathbf{R}^{n+1}$. Sei $\eta : U \to \mathbf{R}$ eine beliebige aber fest gewählte glatte Funktion mit kompaktem Träger, d.h. der Abschluss der Menge $\{u \in U,\, \eta(u) \neq 0\}$ ist eine kompakte Teilmenge der offenen Menge U. (Dies ist stärker als die Annahme dass η auf dem Rand von U verschwindet! U könnte ja auch unbeschränkt sein. Bei beschränktem U verschwinden solche Funktionen in einer ganzen Umgebung des Randes von U.) Sei N das Standardeinheitsnormalenfeld für S. Für $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ definiere $F_t(u) = F(u, t) = F(u) + t\,\eta(u)\,N(u)$. Sei $g_{ij}(u, t) = \frac{\partial F_t(u)}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial F_t(u)}{\partial u_j}$.

(a) Zeige: Für jedes festes η wie oben gibt es ein $\epsilon > 0$ so dass die Mengen $S_t = F_t(U)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ parametrisierte n-Flächen sind.

(b) Zeige: $\frac{d}{dt}_{|t=0} \sqrt{\det(g_{ij}(u, t))} = -\sqrt{\det(g_{ij}(u))}\,\eta(u)\,H(u)$ für alle $u \in U$. H ist die mittlere Krümmung von S. (Hint: Benutze Aufgabe 2(b).)

(c) Sei S eine Minimalfläche, d.h. für jedes feste η wie oben und zugehörige $\epsilon > 0$ (wie in Teil (a)) gelte $Area\,(S) \leq Area\,(S_t)$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Folgere hieraus die Aussage: $\int_S H\,\eta\,dA = 0$ für alle glatten $\eta : U \to \mathbf{R}$ mit kompaktem Träger.

(d) Durch Wahl von geeigneten Funktionen η in (c) zeige dass H überall verschwindet.

6 Punkte

Abgabe der Aufgaben bis zum Dienstag, 3. Dezember, 10 Uhr s.t. in Raum 124, Arnimallee 3 (Hinterhaus) bei Hanne Hardering